

## O TAK ZWANYCH NACZELNYCH PRAWACH ROZUMOWANIA I ZALEŻNOŚCIACH MIĘDZY NIMI

Tak zwane naczelne prawa rozumowania (tożsamości, sprzeczności, wyłączonego środka i podwójnego przeczenia) od dawna sprawiały i sprawiają logikom niemałe trudności, co widać choćby stąd, że nie są zdecydowani, gdzie je umieszczać: jedni kładą je na początku, inni na końcu, a jeszcze inni w środku swych publikacji. Logicy współcześni, a między innymi i Russell, lekceważą je, twierdząc, że są to pewne twierdzenia wśród wielu innych, niesłusznie wyróżniane przez logikę tradycyjną. Wprawdzie niektóre z nich, szczególnie prawo sprzeczności i prawo wyłączonego środka, są to niewątpliwie podstawowe założenia logiki, bez nich bowiem zdania nie miałyby określonej wartości logicznej, ale nie są one wystarczającymi przesłankami dla logiki zdań i wynikają jako twierdzenia z pewnych przesłanek, przyjętych w *Principia Mathematica*.

Do tego trzeba dodać, że i liczne są sposoby formułowania tych praw, szczególnie praw tożsamości i sprzeczności oraz prawa wyłączonego środka. To ostatnie niekiedy formuluje się tak: zdanie i jego przeczenie nie mogą być zarazem fałszywe, a kiedy indziej znowu tak: zachodzi zdanie lub jego przeczenie,

Nie brak też autorów, którzy nie odróżniają wśród tych praw jednego od drugiego. I tak, np. napotyka się zdania, że prawa tożsamości i sprzeczności oznaczają to samo (Leibniz, Twesten).

Dalej, jedni autorowie za naczelne prawo rozumowania uważają prawo tożsamości (Antonius Andreas), inni znowu — prawo sprzeczności (Maass).

Podstawą tych praw, szczególnie prawa sprzeczności i prawa wyłączonego środka, są dwie wartości: prawda i fałsz. Prawo sprzeczności orzeka, że żadne zdanie nie może mieć razem dwu wartości. Symbolicznie:  $(p \vee \neg p) \cdot F$ . Prawo zaś wyłączonego

środka orzeka, że żadne zdanie nie może nie mieć żadnej z dwu wartości. Symbolicznie:  $p \cdot j \cdot P$  lub  $p \cdot j \cdot F$ .

Z połączenia obu tych praw (prawa sprzeczności i prawa wyłączonego środka) powstaje dysjunkcja wyłączająca, orzekająca, że do każdego zdania stosuje się jedna i tylko jedna z dwu wartości, czyli każde zdanie jest prawdą albo fałszem. Symbolicznie:  $x \cdot j \cdot Z \supset \cdot x \cdot j \cdot P // x \cdot j \cdot F$ .

Gdy chodzi o prawo wyłączonego środka, to bierze się pod uwagę powiązane ze sobą zdania sprzeczne, podczas gdy w dysjunkcji wyłączającej rozważa się każde zdanie z osobna, a każde zdanie z osobna jest albo prawdziwe albo fałszywe. Prawa te wyrażają przeto stosunki między prawdą i fałszem.

Sformułował je już Arystoteles, podczas gdy prawa tożsamości i podwójnego przeczenia występują w sformułowaniu dopiero u stoików<sup>1</sup>.

Wilhelm Traugott Krug (1770—1842) — a za nim i William Hamilton (1788—1856) — nazwał po raz pierwszy prawo sprzeczności prawem niesprzeczności<sup>2</sup>.

Prawo sprzeczności występuje w dwóch postaciach:

1. w postaci sformułowanej przez Leibniza<sup>3</sup> i

<sup>1</sup> Sextus, *Adv. math.*, VIII, 292; *Diog. Laert.*, VII, 69.

<sup>2</sup> Por. W. T. Krug, *System der theoretische Philosophie* (W. T. Krug's, *Philosophische Werke*, II, *Denklehre oder Logik*), Erster Theil, Erste Abtheilung, Wien 1818, s. 52: ...und es in dieser Hinsicht den Satz des Widerstreits oder Widerspruchs (*principium repugnantiae s. contradictionis*) nennen, wiewohl dieser Ausdruck nicht eben passend ist... Man sollte also lieber Satz des Nicht-Widerspruchs sagen. Por. także W. Hamilton, *Lectures on Logic*, I, Edinburgh—London 1860, s. 82: Now, in the first place, in regard to the name of this law, it may be observed that, as it enjoins the absence of contradiction as the indispensable condition of thought, it ought to be called, not the Law of Contradiction, but the Law of Non-Contradiction, or of non-repugnantia.

<sup>3</sup> Por. *Recueil de diverses pieces...*, Lausanne 1759, *Second ecrit de Leibniz ou Replique au premiere Ecrit de Clarke*, s. 11: Le grand fondement des Mathématiques est le Principe de la Contradiction, ou de l'identité, c'est-à-dire qu'une énonciation ne sauroit être vraie et fausse en même tems; et qu'ainssi A est A, et ne sauroit être non A. Et ce seul Principe suffit pour

2. w postaci sformułowanej przez Arystotelesa.

Postać 1. ma kształt taki:

A nie jest nie-A.

To negatywnie sformułowanie prawa sprzeczności odpowiada według Leibniza pozytywnej formułce prawa tożsamości: A jest A. Symbolicznie:  $(A) \subset (A)$ . W tej postaci wyrażony jest stosunek między nazwami w jednym i tym samym zdaniu.

Postać 2 ma kształt taki:

Dwa zdania typu „A jest B“ i „A nie jest B“ nie mogą być zarazem prawdziwe, a więc jedno musi być fałszywe.

W tej postaci wyrażony jest stosunek sprzeczności między dwoma zdaniami: twierdzącym i przeczącym.

Arystoteles mówi o prawie sprzeczności w polemice ze zwolennikami Protagorasa, który mniemał, że prawdą jest wszystko, cokolwiek się komu wydaje, i ze zwolennikami Heraklita, który według Arystotelesa negował prawo sprzeczności<sup>4</sup>.

Prawo sprzeczności formułuje Arystoteles między innymi w takiej postaci:

To samo zarazem przysługiwać i nie przysługiwać nie może temu samemu i ze względu na to samo<sup>5</sup>.

Jest to tak zwane ontologiczne prawo sprzeczności w odróżnieniu od logicznego prawa sprzeczności, które Arystoteles formułuje w polemice ze zwolennikami Protagorasa. Arystoteles stwierdza na końcu wywodów, że najpewniejszym ze wszystkich przekonaniań jest to, że nie są zarazem prawdziwe zdania przeciwległe<sup>6</sup>.

---

*démontrer toute l'Arithmétique et toute la Geometrie, c'est-à-dire tous les Principes Mathématiques. Mais pour passer de la Mathématiques à la Physique, il faut encore un autre Principe... c'est le Principe de la Raison Suffisante.* Por. także niewydany rękopis Leibniza: *Handschriften der K. Bibliothek zu Hannover, 4, VIII, 96 (Specimen animadversionum in Sextum Empiricum): Prima veritas est, quae identica est, sub qua principii mcontradictionis comprehendo, ut A sit A sive ut A non sit non-A.*

<sup>4</sup> Met. 1009 a 6—9; 1010 a 10—20.

<sup>5</sup> Met. 1005 b 19—20.

<sup>6</sup> Met. 1011 b 13—15.

Rozgraniczenia między tymi prawami u Arystotelesa jeszcze nie znajdujemy.

Arystoteles sądzi, że prawa sprzeczności udowodnić nie można, bo musiałoby być ono udowodnione przy pomocy jakiegoś innego prawa — bardziej znanego, pewniejszego, tymczasem ono jest najbardziej znane, najpewniejsze ze wszystkich <sup>7</sup>.

Podobnie jak prawo sprzeczności, tak i prawo wyłączonego środka występuje w dwóch postaciach:

1. w postaci sformułowanej przez Arystotelesa i
2. w postaci wyrażającej stosunek między nazwami w jednym i tym samym zdaniu.

Postać 1. ma kształt taki:

Dwa zdania typu „A jest B“ i „A nie jest B“ nie mogą być zarazem fałszywe, a więc jedno musi być prawdziwe.

W tej postaci wyrażony jest stosunek między dwoma zdaniami.

U Arystotelesa należy rozróżnić dwie postacie prawa wyłączonego środka:

- (1) postać ontologiczną i
- (2) postać logiczną.

Postać (1) Arystoteles tak formuluje:

Wszystko musi przysługiwać lub nie przysługiwać (temu samemu i ze względu na to samo) <sup>8</sup>.

Postać zaś (2) podaje w sformułowaniu takim:

Pomiędzy parą sprzeczną nic być nie może <sup>9</sup>.

Nie twierdzi Arystoteles, że jest to prawo niedowodliwe i najpewniejsze. Uważa je jednak za twierdzenie, którego nie dowodzą, lecz którym w dowodach się posługują <sup>10</sup>.

Postać 2 ma kształt taki:

Każde A jest B lub nie-B.

Symbolicznie: (A).  $\bar{C}$ . (B)  $\cup$  — (B).

W tej postaci wyrażony jest stosunek między dwoma nazwami.

<sup>7</sup> *Met.* 1005  $\epsilon$  17—19

<sup>8</sup> *De interpr.* 18 a 35.

<sup>9</sup> *Met.* 1011 b 23—24. Por. także: O. Fechner, *Die sogenannten Axiome der Klassischen Logik*, Leipzig 1929, s. 7.

<sup>10</sup> *Anal. post.* 77 a 27—28.

Robert Grassmann (1815—1901) utrzymuje, że tradycyjna interpretacja tego prawa jest wadliwa. Podaje przeto interpretację własną. Interpretuje to prawo tak: każda klasa (A) zawiera się w sumie powstałej z każdej innej klasy (B) i jej przeczenia  $-(B)$ <sup>11</sup>.

Antonius Andreas († 1320) uważa za prawo naczelne rozumowania wyłącznie prawo tożsamości. Prawa zaś sprzeczności nie uważa za prawo naczelne dlatego, że żadne zdanie modalne nie jest według tego autora zdaniem naczelnym, gdyż zawarte jest w nim zdanie asertoryczne. Prawo zaś sprzeczności (niemożliwą jest rzeczą, by to samo zarazem było i nie było) jest zdaniem modalnym. A przeto nie jest ono prawem naczelnym<sup>12</sup>.

Joh. Gebh. Maass (1766—1823) uważa za prawo naczelne rozumowania wyłącznie prawo sprzeczności. Prawo zaś tożsamości może być według tego autora wywiedzione z prawa sprzeczności, a prawo wyłączonego środka — z praw tożsamości i sprzeczności<sup>13</sup>.

<sup>11</sup> Por. R. Grassmann, *Begriffslehre oder Logik. Zweites Buch der Formenlehre oder Mathematik*, Stettin 1872, s. 16: *Satz des ausgeschlossenen Mittels (principium exclusi medii):  $a \leq \bar{u} + u$ . Jeder Begriff ist der Summe jedes andern Begriffes und seines Nichtes untergeordnet. Der Satz wird gewöhnlich so ausgedrueckt: a ist entweder u oder Nicht u. Diese Form des Satzes ist aber fehlerhaft, denn jeder dem u uebergeordnete oder ihn schneidende Begriff ist weder unter u noch unter Nicht u enthalten.*

<sup>12</sup> Por. *Quaestiones subtilissimae super duodecim libros metaphysicos Aristotelis Antonii Andrea e ordine minorum, accuratissime emendati per Franciscum de Valentia*. Impressus Ventii 1514, lib. IV, q. 5: *utrum hoc principium: impossibile est idem simul esse et non esse simpliciter sit primum; nulla propositio modalis est primo prima, quia est resolubilis in aliam de inesse; sed istud principium impossibile est etc est propositio modalis, ergo non est primo prima... et primo primum dico quod istod ens est ens.*

<sup>13</sup> Por. Joh. Gebh. Maass, *Grundriss der Logik. Zum gebrauch bei Vorlesungen*, Halle—Leipzig (1793) 1823, s. 9: *Der Satz des Widerspruchs ist das schlechterdings erste Gesetz des Denkens. Denn er muss bei jedem andern schon zum Grunde liegen, und laesst sich aus keinem andern folgern.* Por. także tamże s. 10: *Dieser Grundsatz, welcher der Satz der Einerleiheit (principium identitatis) genannt wird, kann auch aus § 22 (Satz des Widerspruchs) hergeleitet werden. A ist A; denn widrigenfalls wäre es A, welches nicht A wäre, gegen § 22.* Por. także tamże s. 11: *„Dieser Grundsatz, welcher der Satz der Ausschliessung (principium exclusi tertii) genant wird, laesst sich*

A. D. Ch. Twesten (1789—1865) utrzymuje, że prawa tożsamości i sprzeczności wyrażają to samo, ale nie może być wywiezione jedno z drugiego, gdyż nie może być wywiezione twierdzenie z przeczenia i przeczenie z twierdzenia<sup>14</sup>.

Chr. Sigwart (1830—1904) próbuje wywieść prawo wyłącznego środka (A jest B lub A nie jest B) z praw sprzeczności i podwójnego przeczenia<sup>15</sup>.

Przeczenie zdania jest zmianą jego wartości logicznej, a więc jeśli p jest jakimkolwiek zdaniem, to  $\neg p$  jest zdaniem z nim sprzecznym, czyli, jeśli p prawdziwe, to  $\neg p$  fałszywe i jeśli p fałszywe, to  $\neg p$  prawdziwe. Z tej definicji wynika, że  $\neg(\neg p)$  jest p. Jest to prawo podwójnego przeczenia. Wyraża ono, że dwa zdania „ $\neg(\neg p)$ “ i „p“ mają te same wartości. Istotnie, wartość  $\neg p$  jest przeczeniem odpowiedniej wartości p, a wartość  $\neg(\neg p)$  jest przeczeniem odpowiedniej wartości  $\neg p$ , czyli jest przeczeniem przeczenia wartości p, a więc jest p.

Zdanie:  $\neg (A \text{ jest } B)$  znaczy według Sigwarta tyle, co: A nie jest B, pod warunkiem jednak, że A jest indywiduum.

Jeśli  $\neg (A \text{ jest } B)$  znaczy tyle, co: A nie jest B, to na podstawie prawa podwójnego przeczenia zdanie:  $\neg/\neg (A \text{ jest } B)$ , czyli A jest B, znaczy tyle, co:  $\neg (A \text{ nie jest } B)$ .

wieder aus § 25 (principium identitatis), mithin zuletzt aus § 22 (Satz des Widerspruchs) herleiten. Alles Moegliche ist entweder A oder nicht A. Denn wenn es nicht A ist (wenn der erste Fall nicht stattfindet), so ist es nicht A (so findet der andere Fall statt) § 25.

<sup>14</sup> Por. A. D. Ch. Twesten, *Die Logik, insbesondere die Analytik*, Schleswig 1825, s. 17: *Es ist die Identitaet, die durch beide Saetze, positiv und negativ, ausgedrueckt wird. Deshalb darf es nicht befremden, zwey Principien an der Spitze einer Wissenschaft zu seyn. Man kann sie aber nicht von einander ableiten, weil Bejahung und Verneinung nicht von einander abgeleitet werden koennen.*

<sup>15</sup> Por. Chr. Sigwart, *Logik*<sup>3</sup>, Tuebingen 1904, I, s. 202: *Aus dem Satze des Widerspruchs und dem Satze der doppelten Verneinung folgt von selbst, dass von zwei contradictorisch entgegengesetzten Urteilen das eine notwendig wahr ist, dass es also neben Bejahung und Verneinung keine dritte Aussage gibt, neben der jene beiden falsch wären. Dies ist der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.*

Wychodząc z tych zasadniczych rozważań, możemy teraz przejść do wywodu Sigwarta prawa wyłączonego środka z praw sprzeczności i podwójnego przeczenia.

Ten wywód Sigwarta jest taki:

Przyjmujemy, że zdania

A jest B i A nie jest B (1)

na podstawie prawa sprzeczności nie mogą być zarazem prawdziwe.

Dla dowodu prawa wyłączonego środka należy dowieść, że zdania (1) nie mogą być zarazem fałszywe.

Załóżmy, że tak jest, tj. (1) są oba zarazem fałszywe.

W takim razie zdania

— (A jest B) i — (A nie jest B) (2)

będą zarazem prawdziwe.

Ale na podstawie prawa podwójnego przeczenia zdanie

— (A nie jest B) znaczy tyle, co A jest B.

Przeto para (2) jest równoznaczna z parą (1).

Wychodzi więc, że zdania (1) będą zarazem prawdziwe, co przeczy prawu sprzeczności.

Ten dowód Sigwarta zawiera jednak błędne koło, gdyż jest on sprowadzaniem do absurdu, a sprowadzanie do absurdu opiera się na prawie wyłączonego środka.

Przeto wynika stąd, że dla dowodu prawa wyłączonego środka należałoby opierać się na tymże prawie wyłączonego środka,

Można okazać, że wywodzi się także i prawo podwójnego przeczenia. Wywodzi się ono z prawa sprzeczności i wyłączonego środka. To prawo wyraża równoważność zdań „p“ i „—(—p)“ czyli:  $p \equiv \neg(\neg p)$ , to znaczy:

$p \cdot j \cdot P \supset \neg p \cdot j \cdot F$  i  $\neg p \cdot j \cdot F \supset p \cdot j \cdot P$ , czyli:  $p \cdot j \cdot P \equiv \neg p \cdot j \cdot F$

Ten wywód w postaci słownej jest taki:

Jeśli p jest prawdą, to, na podstawie prawa sprzeczności, —p jest fałszem, więc —(—p) jest prawdą.

Jeśli zaś p jest fałszem, to na podstawie prawa wyłączonego środka, —p jest prawdą, więc —(—p) jest fałszem.

A więc p i —(—p) są zarazem prawdziwe albo zarazem fałszywe.

Weźmy jeszcze następujący wywód słowny prawa podwójnego przeczenia na podstawie prawa sprzeczności i prawa wyłączonego środka.

Należy dowieść, że  $p \equiv -(-p)$  tj.

$$1) p \supset -(-p) \text{ i } 2) -(-p) \supset p.$$

Wywód 1)

Jeśli  $p$  jest prawdą, to (na podstawie prawa sprzeczności)  $\neg p$  jest fałszem, a więc  $p \supset \neg(\neg p)$ .

Wywód 2)

Jeśli  $\neg(\neg p)$  jest prawdą, tj.  $\neg p$  jest fałszem, to (na podstawie prawa wyłączonego środka)  $p$  jest prawdą, a więc  $\neg(\neg p) \supset p$ .

W ostatecznym rezultacie należy powiedzieć, że zarówno prawo sprzeczności jak i prawa wyłączonego środka i podwójnego przeczenia nierozzerwalnie się wiążą z prawem tożsamości. Można uzasadnić to tak:

Stosunek implikacji da się ująć intuicyjnie w sposób trojaki:

- (1) gdzie jest  $p$ , tam jest  $q$
- (2) wszędzie mamy, że jest  $q$  lub niema  $p$
- (3) nigdzie niema  $p$  bez  $q$ .

Symbolicznie:

- (1)  $p \supset q$
- (2)  $q \cup \neg p$
- (3)  $\neg(p \cdot \neg q)$ .

Jeśli za  $q$  podstawimy  $p$ , to trzy wypowiedzi tego stosunku przybiorą postać taką:

- (1)  $p \supset p$  (prawo tożsamości)
- (2)  $p \cup \neg p$  (prawo wyłączonego środka)
- (3)  $\neg(p \cdot \neg p)$  (prawo sprzeczności).

Te trzy prawa logiczne odpowiadają następującemu wzorowi Burali-Fortiego:

$p \supset q = q \cup \neg p = \neg(p \cap \neg q)$ <sup>16</sup>. Oznaczając w tym wzorze stosunek równoważności przez „ $\equiv$ ” a stosunek ko-

<sup>16</sup> Por. C. Burali-Forti, *Logica matematica*<sup>2</sup>, Milano 1919, ss. 246, 249.



niunkcji przez „ $\cdot$ ”, otrzymujemy  $p \supset q \equiv \cdot q \cup \neg p \equiv \cdot \neg \cdot \neg \cdot (p \cdot \neg q)$ , który to wzór dla  $q/p$  daje:  $p \supset p \equiv \cdot p \cup \neg p \equiv \cdot \neg \cdot (p \cdot \neg p)$ .

Jeśli uważać będziemy zdania (1) — (3) nie tylko za równoważne, lecz i za równoznaczne, to prawa podwójnego przeczenia ( $p \supset \neg(\neg p)$ ,  $\neg(\neg p) \supset p$ ) będą równoznaczne ze zdaniem:  $\neg p \cup \neg(\neg p)$  i ze zdaniem:  $\neg p \cup p$ , które jest członem definiującym implikację  $p \supset p$ .

Les règles de l'interprétation juridique n'étant pas règles logiques de raisonnement, l'interprétation juridique ne mérite pas le nom de logique juridique au sens propre du mot. Néanmoins cette dénomination peut être employée pour la désigner au sens métonimique, à la base de l'analogie d'attribution qui nous autorise à attribuer le nom propre de l'effet à la cause ou celui du moyen à la fin et vice versa (p. ex. on appelle l'air sain parce qu'il rend l'homme sain).

L'interprétation juridique peut donc être appelée logique juridique seulement au sens analogique, c'est-à-dire dans la mesure où ses règles imposent l'emploi de règles logiques de raisonnement, surtout de celles qui sont basées sur les thèses de la logique des propositions normatives.

S. KAMIŃSKI

### THE ORIGIN OF MATHEMATICAL INDUCTION

It is commonly thought that the first to have made definite and purposive use of the principle of arithmetic induction was the Italian Francesco Maurolico (1494—1575). Historians of mathematics of proofs where this principle may possibly have been made use of Euclides, John Campanus (XIIIc), Levi ben Gerson (XIVc.).

The author's investigations and research have led him to accept the following conclusions:

(1) Maurolico's method of proofs which has been interpreted as an application of the principle of mathematical induction, is both a continuation of the scholastic tradition, and of that of the earliest arithmeticians. In this respect, he is the immediate successor of Jordan Nemorarius (d. 1237) and of his commentator Jacob Faber Stapulensis (d. 1537) and indirectly — of Boethius, Nicomachus of Geraza, Theon of Smyrna and Euclides.

(2) Essentially, the use made by Maurolico of Mathematical induction, is not any clearer in his work than in that of Jordan (ed. and trad. Fabre), not even in that of Theon of Smyrna.

(3) It would seem that the relevant proofs of Maurolico and his predecessors are based not on *mathematic* but on *empiric* induction.

A. KORCIK

### LES LOIS PRINCIPALES DU RAISONNEMENT ET LES RELATIONS ENTRE ELLES

Le présent travail est une étude historique et critique sur les lois principales du raisonnement (principes de contradiction et du milieu exclu,

principe d'identité et loi de double négation) et sur les relations entre elles. L'auteur présente les principes de contradiction et du milieu exclu formulés par Aristote et par Leibniz, l'interprétation de la principe du milieu exclu de Grassmann ainsi que la déduction de Sigwart concernant le principe du milieu exclu de celles de la contradiction et de la double négation. L'auteur essaye de déduire la loi de double négation de celles de la contradiction et du milieu exclu. En dernier résultat il constate que le principe de contradiction ainsi que celles du milieu exclu et de la double négation sont inséparablement liées à celle de l'identité.